Úlohy 1. kola 49. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie B*

Ve všech úlohách počítejte s tíhovým zrychlením $g = 9{,}81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

1. Dokonale pružná srážka

Ve výšce H nad zemí jsou těsně nad sebou umístěny dvě kuličky zanedbatelných rozměrů o hmotnostech m_1 (hmotnost spodní kuličky), m_2. Spodní kuličku uvolníme a necháme padat volným pádem. V okamžiku, kdy se tato kulička odrazí od země, uvolníme druhou kuličku a opět ji necháme padat volným pádem. Obě kuličky se pohybují v téže svislé přímce, takže po nějaké době dojde k jejich srážce. Předpokládejte, že odraz první kuličky od země a srážka obou kuliček jsou dokonale pružné a odpor vzduchu je zanedbatelný.

a) Určete, v jaké výšce nad zemí a jakými rychlostmi $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ se kuličky srazí.

b) Určete rychlosti $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ obou kuliček bezprostředně po srážce v závislosti na poměru $m_1/m_2 = k$.

c) Popište pohyb kuliček po srážce. Vypočtěte, do jaké výšky vystoupí 2. kulička po srážce pro $k = \frac{1}{2}$, $k = 3$ a $k = 10$.

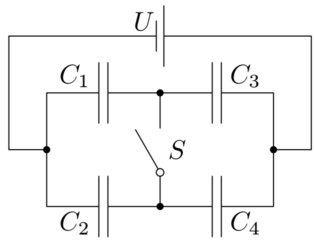
Výsledky v úlohách a) až c) vyjádřete pomocí výšky H.

2. Kondenzátory

Na obr. 1 je znázorněn elektrický obvod obsahující zdroj stejnosměrného napětí $U = 24$ V, spínač S a kondenzátory o kapacitách $C_1 = 10$ μF, $C_2 = 2C_1$, $C_3 = 3C_1$ a $C_4 = 4C_1$.

a) Určete napětí a náboje na jednotlivých kondenzátorech, je-li spínač S rozepnut.

b) Určete napětí a náboje na jednotlivých kondenzátorech, je-li spínač S sepnut.



Obr. 1

3. Let po uzavřené dráze

Letadlo má dvakrát letět po uzavřené trase $ABCA$. Body A, B, C leží ve vrcholech rovnostranného trojúhelníka. Velikost v rychlosti letadla vzhledem k okolnímu vzduchu je konstantní. Při prvním letu však bude foukat vítr o konstantní rychlosti $u < v$ ve směru od A do B a při druhém letu vítr stejně velké rychlosti ve směru od B do A.

a) Jaká bude rychlost letadla na jednotlivých úsecích trasy v prvním a ve druhém případě? O jaký úhel musí být osa letadla odchýlena od směru letu?

b) V kterém případě bude celková doba letu větší?

Dobu potřebnou ke změně kurzu při přeletu nad body B a C zanedbejte.

4. Spalovací motor

Čtyřdobý čtyřválcový benzinový motor Felicie se zdvihovým objemem jednoho válce $V_\mathrm{z} = V_\mathrm{max} - V_\mathrm{min} = 322\ \mathrm{cm}^3$ a kompresním poměrem $\varepsilon = \dfrac{V_\mathrm{max}}{V_\mathrm{min}} = 8{,}8$ nasává palivovou směs (vzduch s nepatrným množstvím benzinu) při tlaku $p_1 = 0{,}10\ \mathrm{MPa}$ a teplotě $t_1 = 20\ ^\circ\mathrm{C}$. Následující děj ve válci můžeme modelovat jako cyklus, ve kterém po sobě následují:

- adiabatická komprese 1 – 2, při které se objem pracovní látky (směsi) zmenší z $V_1 = V_\mathrm{max}$ na $V_2 = V_\mathrm{min}$, teplota se zvětší z t_1 na t_2 a tlak z p_1 na p_2,
- izochorické ohřátí pracovní látky 2 – 3, při které se teplota ve válci zvětší na t_3 a tlak na p_3,
- adiabatická expanze 3 – 4 na počáteční objem V_1, při které tlak ve válci klesne na p_4 a teplota na t_4,
- izochorické ochlazení pracovní látky na počáteční teplotu a tlak.

Následuje výfuk, nové sání a celý cyklus se opakuje. Předpokládáme, že při izochorickém ohřátí 2 – 3 dosáhneme poměru $p_3/p_2 = 2{,}5$. Vlastnosti palivové směsi popisují veličiny $M_\mathrm{r} = 32$, $c_V = 0{,}65\ \mathrm{kJ \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}}$, $\varkappa = 1{,}4$. Určete

a) základní stavové veličiny p, V, T pro jednotlivé body pracovního cyklu,
b) hmotnost směsi ve válci (směs považujte za ideální plyn),
c) množství tepla přijatého a odevzdaného pracovní látkou v průběhu jednoho cyklu, práci vykonanou při jednom cyklu a tepelnou účinnost motoru,
d) teoretický výkon motoru a hodinovou spotřebu paliva s výhřevností $H = 42\,000\ \mathrm{kJ \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}}$, má-li motor 4000 ot/min.

5. Pohyb družice

Družice Země se pohybuje po kruhové trajektorii kolem Země ve výšce $h = 0{,}10R_\mathrm{z}$ nad povrchem Země. Trajektorie pohybu družice má být převedena na eliptickou, a to tak, že při průchodu perigeem by měla být vzdálena $0{,}10R_\mathrm{z}$ od povrchu Země, při průchodu apogeem je její vzdálenost od povrchu Země $10R_\mathrm{z}$.

a) Jak musíme zvětšit rychlost družice, aby přešla z kruhové trajektorie na požadovanou eliptickou trajektorii? Předpokládáme, že doba potřebná k urychlení je mnohem menší než doba oběhu na kruhové trajektorii.
b) Určete dobu oběhu T_1 družice na kruhové trajektorii a dobu oběhu družice T_2 na eliptické trajektorii. Kolikrát se zvětší doba oběhu družice na eliptické trajektorii oproti trajektorii kruhové?

Hmotnost Země $M_\mathrm{z} = 6{,}0 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}$, poloměr Země $R_\mathrm{z} = 6400\ \mathrm{km}$, gravitační konstanta $\varkappa = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}$.

Návod k řešení úlohy je možno nalézt ve studijním textu *Pohyb těles po eliptické trajektorii v radiálním gravitačním poli*, který je možno stáhnout např. z Internetu ze stránek http://www.uhk.cz/fo nebo ze stránek http://fo.cuni.cz.

6. *Praktická úloha:* **Studium kmitů deklinační magnetky**

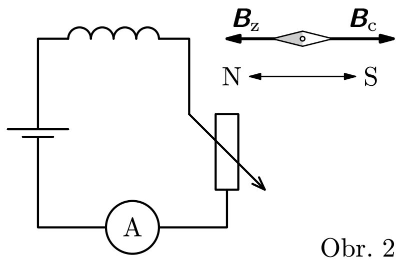
Pomůcky: cívka 300 z/5 A z rozkladného transformátoru, reostat 16 Ω/4 A, ampérmetr, zdroj stejnosměrného napětí 12 V, malá deklinační magnetka, stopky.

Úkol: Ověřte, že závislost periody malých kmitů deklinační magnetky okolo rovnovážné polohy na velikosti B horizontální složky magnetické indukce pole je popsána vztahem

$$T = kB^m \,, \tag{1}$$

kde k a m jsou konstanty. Určete hodnotu konstanty m, která by neměla záviset na použité magnetce.

Provedení úlohy:



Obr. 2

- Cívku umístíme do vzdálenosti asi 15 cm od magnetky tak, aby její osa splývala s podélnou osou deklinační magnetky. Zdroj napětí připojíme k cívce přes reostat a ampérmetr tak, aby magnetická indukce $\boldsymbol{B}_\mathrm{c}$ cívky v místě magnetky měla opačný směr než horizontální složka $\boldsymbol{B}_\mathrm{z}$ magnetického pole Země (obr. 2).
- Proud v obvodu nastavíme na hodnotu $I_0 = 1$ A a vzdálenost cívky od magnetky upravíme tak, aby se magnetka po vychýlení přestala vracet do rovnovážné polohy. Tím dosáhneme rovnosti $B_{\mathrm{c}0} = B_\mathrm{z}$, kde $B_{\mathrm{c}0}$ je velikost magnetické indukce pole cívky v místě magnetky při proudu I_0.
- Reostatem postupně nastavíme alespoň 10 různých hodnot proudu $I > I_0$. Pokaždé změříme periodu kmitů magnetky po jejím malém vychýlení z rovnovážné polohy. Výsledky měření zapíšeme do tabulky:

i	I/A	$10T$/s	T/s	$\log(I - I_0)$	$\log T$
1					
2					
⋮					

Vyhodnocení měření: Velikost B_c indukce magnetického pole cívky v místě magnetky je přímo úměrná procházejícímu proudu, konstantu úměrnosti označíme k_1:

$$B_\mathrm{c} = k_1 I \,, \qquad B_\mathrm{z} = B_{\mathrm{c}0} = k_1 I_0 \,.$$

Velikost B výsledné horizontální složky magnetické indukce v místě magnetky je tedy

$$B = k_1(I - I_0)\,.$$

Dosazením do (1) dostaneme

$$T = k[k_1(I - I_0)]^m = K(I - I_0)^m\,, \tag{2}$$

kde $K = k \cdot k_1^m$. Zlogaritmováním vztahu (2) dojdeme k lineárnímu vztahu mezi proměnnými $y = \log T$ a $x = \log(I - I_0)$:

$$\log T = m \log(I - I_0) + \log K\,, \quad \text{tj.} \quad y = mx + \log K\,. \tag{3}$$

Zpracování naměřených hodnot:

a) Z výsledků měření sestrojte graf funkce (3).

b) Z grafu funkce (3) určete konstantu m a vyjádřete ji ve tvaru $m \approx \dfrac{p}{q}$, kde p, q jsou malá celá čísla.

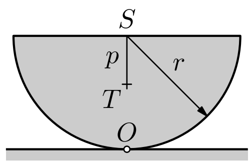
c) Určete fyzikální rozměr konstanty k ze vztahu (1).

Poznámky:

- Je třeba použít magnetku malých rozměrů, u velkých dochází k tlumení. Magnetku vychýlit jen o malý úhel do 20°. Cívku a magnetku umístit na dřevěný stůl co nejdále od kovových předmětů – připojení ke zdroji, reostatu ampérmetru provést dlouhými vodiči.
- Zpracování naměřených hodnot doporučujeme provést v Excelu – zvolit *XY bodový graf*, přidat *spojnici trendu* a zobrazit *rovnici regrese* a *koeficient spolehlivosti*.

7. Kolébání půlválce

Homogenní půlválec o poloměru r a hmotnosti m leží na vodorovné rovině (obr. 3)



Obr. 3

a) Určete moment setrvačnosti půlválce vzhledem k přímce, ve které se půlválec dotýká roviny.

b) Půlválec vykloníme o malý úhel z rovnovážné polohy a pustíme. S jakou periodou se bude kolébat?

Řešte obecně a pro hodnoty $r = 15$ cm, $m = 45$ kg.

Předpokládáme, že tření mezi půlválcem a rovinou je dostatečně velké, aby nedošlo k prokluzování, a že valivý odpor je zanedbatelný. Těžiště půlváce se nachází ve vzdálenosti $p = \dfrac{4r}{3\pi}$ od středu. Pro malé úhly můžete použít aproximace $\sin\alpha \approx \alpha$, $\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\dfrac{\alpha}{2} \approx 1 - \dfrac{\alpha^2}{2}$.